§１０．エネルギー

（１）仕事と力

物体の運動を変化させるには力が必要。

その力を与え続けるには「労力」が必要。その労力を物理量として定義しよう　→　仕事という

力と仕事（エネルギー）は違うことを押さえよう

ある物体を動かすときの労力は物体に加える力のみならず、物体の動く距離にも関係する。加える力の経路にそっての累積を仕事という。ここでは簡単のため１次元（ｘ軸方向）のみの運動について考える。

$W = \int F dx$　　　　　1 J＝1 N×1 m

1 cal＝4.2J（ジュール）　1 N の力で 4.2m 押しつづけるとその仕事量は 1 cal 分の熱量になり、1g の水を 1°C あげることができる。

力Ｆが一定のときは　仕事は力（F）×　距離（ｘ）　になる

注意：動く方向の力の成分×距離が仕事になる。動かす方向と力が垂直なら仕事はしない。

→　重力がかかっていても水平になめらかな平面内で物体を動かすときは仕事をしない。

物体に力を加えたほうから考えると、力 F を加え続けて距離 x 動かした。そのため労力（エネルギー）を使った。このエネルギーを仕事という。

仕事＝加えた力×力の方向に動いた距離

＜問題３２＞

質量 5kg の乳母車が止まっている。この乳母車を 10N の力で 1 m 押し続けた。なした仕事はいくらか？

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

（２）運動エネルギー

物体に力を加え続けて、ある距離物体を動かす。物体はその間加速度運動をするので速度が増す。速度が増したことによって増えたエネルギーを運動エネルギーという。

運動エネルギー＝$mv^2/2$　　この場合エネルギーの単位は　$[kgm^2/s^2]=[J]$

速度 v で動いている物体を静止させるとき物体に与える仕事量、逆に静止している物体の速度を v にするために必要な仕事量を考える

$$W = \int F dx = \int m\,dv/dt \times v\,dt = \int mv\,dv = mv^2/2 - 0 = mv^2/2$$

この仕事量はいいかえれば速度 v で動く物体が運動している事によって必ずもつエネルギーといえる。これを**運動エネルギー**という。

＜問題３３＞　力を加えて物体を動かすとき、力を加えたものは労力を消耗するが物体はエネルギーをもらう。　質量 5kg の乳母車が止まっている。この乳母車を 10N の力で１秒間押し続けた。乳母車の運動エネルギーはいくらからいくらにふえたか？

力を加えると物体は加速度運動をする　力が 10N なら加速度はいくらか？

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

その加速度で１秒間運動すると速度はいくらになるか？

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

はじめの速度と１秒後の速度がわかったのでそれぞれの運動エネルギーがわかる。

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

この乳母車は１秒間押すと 1m 進むことを確かめよ。

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

つまり乳母車が得た運動エネルギーと力を加えた人がなした仕事量は等しい。

（３）位置エネルギー

仕事をしても物体の運動エネルギーが増えないときがある。

例１：水の入ったバケツを鉛直上向きにひもでゆっくり持ちあげた。

　バケツの重さ分だけの力を上向きに加えるとバケツは浮く。そのままもうちょっと力を加えるとほとんど速度は 0 のままでバケツは上に持ち上がる。このときバケツを引っ張っている人はバケツの重さ分だけの力 mg を加えて、ある高さ h だけ上に持ち上げるから　mgh　だけ仕事をしたことになる。その一方バケツの速度はほとんど 0 のままなので運動エネルギーは 0 のまま。力を加えた人がなした仕事（エネルギー）はどうなったのか?

例２：高さ h のところにある物体を静かに離すと物体は地表面に落ちる直前、ある速度を持って運動している。つまり物体は高いところでは止まっていた（運動エネルギー0）のに、地表面では運動エネルギーを持っている。誰からこのエネルギーをもらったんだろう？？

例３：坂道をのぼった人は重力にさからって仕事をしたのにどうして運動エネルギーが増えないんだろう？？

物体が重力のもとで高さ h のところにいる→すでに地表面から mgh だけの仕事をしてもらっている。つまり物体は運動エネルギーとは違う形のエネルギーを持っている。そのエネルギーを位置エネルギーという。地表面に落ちるときは位置エネルギーが減って運動エネルギーが増えることになる。

位置エネルギー＝重力×高さ＝mgh

坂を上がる（斜めにひっぱって持ち上げる）ときになす仕事も、坂の距離ではなく重力の方向の距離つまり高さになる。

地表面に静止している人　　位置エネルギーが 0

高さ h(m)に静止している人　　　位置エネルギーが　mgh（重力×そこまでの高さ）

高いところにいる人はそれだけでエネルギーをもっている。

物体が各位置にあるとき潜在的にある仕事をなす能力をもっているという意味で位置エネルギーが定義される。　　　　　　U＝－∫Fdx

物体にある決まった力 F がかかっているとき、その力に逆らって物体を基準点から x だけ動かすにはU＝－F x だけの仕事をしなければならない。つまり物体が x にいるためには基準点よりUだけ多くのエネルギーをもっていることを意味する。これを x における位置エネルギーという。

重力による位置エネルギー

地表付近高さ h の点での位置エネルギー

基準点　地表　　位置エネルギー0

U＝－(－mg)×h＝mgh

ばねの位置エネルギー

x だけのびた（ちぢんだ）点ではばねを元に戻そうとする力　f＝－kx が働いている。そのときの位置エネルギー

基準点　x＝0（自然長）　位置エネルギー0

U（x）＝－∫（－kx）dx＝kx^2／2

◎それでは、鉄棒で 30 秒支えることができる人は 30 秒でトラックを時速 70km まで加速できるの？？？？　→　支える力と動かす労力（エネルギー）は違う！！

◎縄を 270mよじ登る労力と（氷の上で）トラックを 30 秒加速して時速 65km にする労力はほぼ同じ

（4）エネルギーの保存

◎地表面まで飛び降りたら位置エネルギーが減ることになる。減ったエネルギーはどうなるんだろう？？　－－＞　地表面に激突する直前までは運動エネルギーが増える

－－＞　激突したときにそのエネルギーで自分を破壊したり、地面に与えることになる。

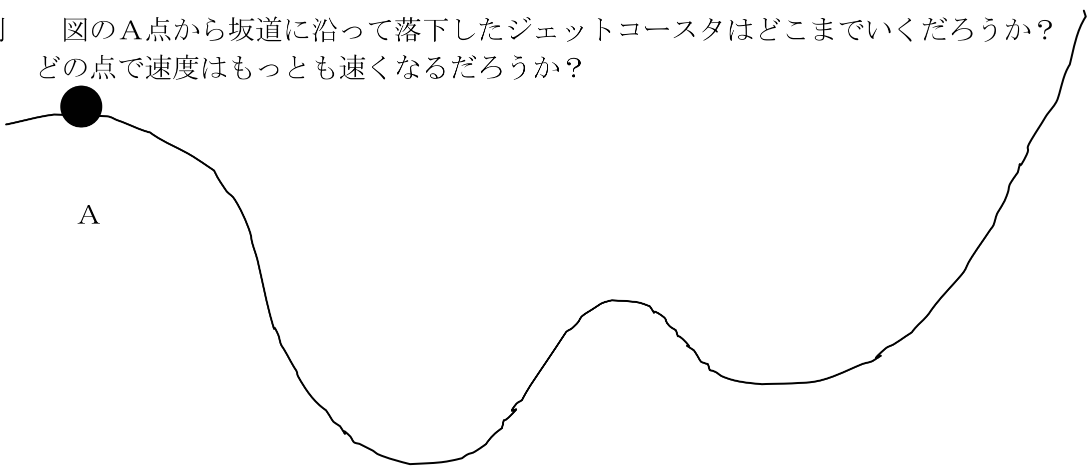
つまりエネルギーは運動エネルギーになったり、位置エネルギーになったりする。
さらに光エネルギー、熱エネルギーになって逃げてしまうこともある。

$\boxed{\text{全部を合わせるとエネルギーは全体として保存する。}}$

熱や光になって逃げないとき

全エネルギー＝運動エネルギー＋位置エネルギー＝一定

例　　図のＡ点から坂道に沿って落下したジェットコースタはどこまでいくだろうか？
どの点で速度はもっとも速くなるだろうか？



例　　高さ h の点から、坂を落下した質量 m の球は地表面ではいくらの速度になるか？

高さ h での位置エネルギー　　　mgh

高さ 0 まで落下すると位置エネルギーは 0 になるが、その分が全て運動エネルギーに変る。

$mv^2/2 = mgh \qquad v^2 = 2gh \qquad v = \sqrt{2gh}$

例：

質量 60kg のスキージャンパーがジャンプ台を滑り降りてくる。このジャンプ台は出発点から飛び出す点までの垂直距離が 100m、水平距離が 200m である。このジャンパーの出発時の速さが 0 であったとき、飛び出す瞬間の速さはいくらか？

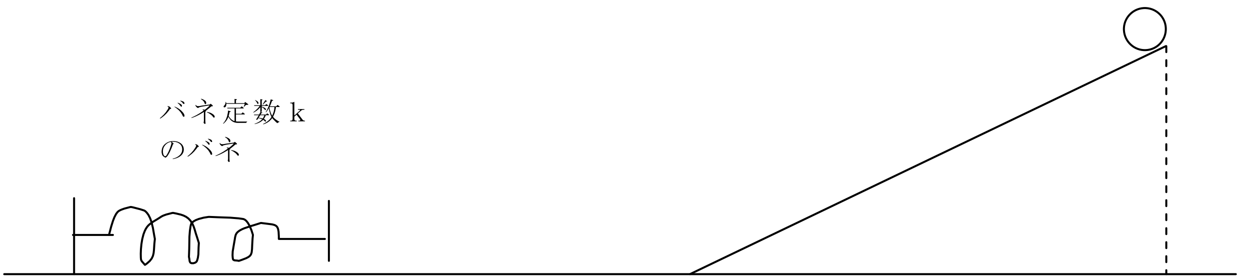
スキージャンパーは出発時から飛び出す瞬間までに垂直距離 100m 落下する。つまり

位置エネルギーが　$60\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 100\text{m} = 58800\text{J}$　だけ減少した。

その分が運動エネルギーになるから、飛び出す瞬間の速度を v とすると、

$mv^2/2 - 0 = 58800 \qquad v^2 = 1960 \qquad v = 14\sqrt{10} = 14 \times 3.16 = 44.2 = 44\text{m/s}$

例　斜面に添って高さｈから質量ｍのボールを転がした。水平面上を転がってバネ定数ｋのバネを押すとバネはいくら縮むだろうか？



ボールの始めのエネルギーは位置エネルギーのみ

mgh

水平面まで落ちたときのエネルギーは全て運動エネルギーになる

mv^2／2

バネを縮めるとボールは止まる。そのときのエネルギーはバネのエネルギーのみになる

kx^2／2

この３段階でそれぞれエネルギーが失われない場合それぞれは等しい。

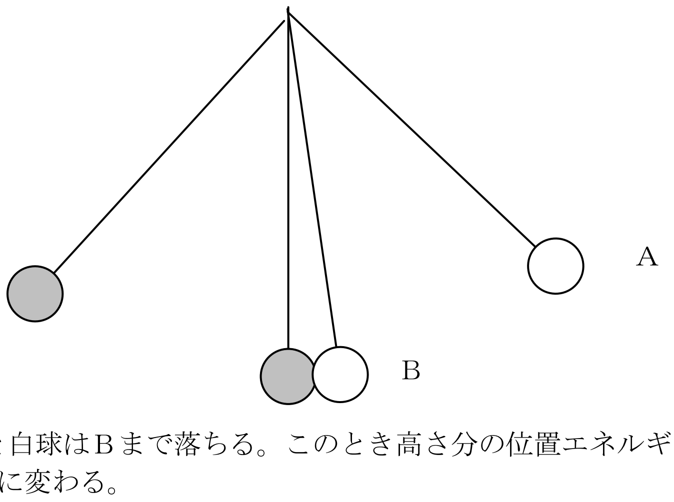
kx^2／2＝mgh　　　　　$x=\sqrt{(2mgh/k)}$

力を使って説明する代わりにエネルギーの保存を使って説明できます

１．どうしてボールが落下するとき、ボールはだんだん速さが増すんだろう？
→　地球に重力で引っ張られ続けるから加速度運動をして速くなる。
→　高さが下がって位置エネルギーが小さくなる分運動エネルギーが増えるから。

２．どうしてボールを投げ上げるとき、ボールはある高さまでしか上がらないんだろう？
→　重力が下向きに引っ張っているから速度は減速し、どこかで上向きの速さが０になるから
→　ボールは投げ上げるときの速さに応じた運動エネルギーをもつが、高くなると位置エネルギーが増える分運動エネルギーは減り、始めの運動エネルギーが０になるまで（それが全部位置エネルギーになるまで）上昇するがそれ以上はエネルギーがないので上がらない。

次の運動を説明してみよう



１）Ａから静かに手を離すと白球はＢまで落ちる。このとき高さ分の位置エネルギーmgh が運動エネルギーmv^2／2 に変わる。

２）B では白球は速度 v になって右から静止している黒球に衝突する。運動量保存則とエネルギー保存則を使うと同じ質量の球なら今度は白球が静止して黒球が元の白球の速度 v になる。黒球は運動エネルギーmv^2／2 を持っているのでそれが全て位置エネルギーになって速度が 0 になるまで

上昇する。つまりはじめ白球があった高さｈまであがる。速度が０になると重力に引かれて黒球はまた下へ落ちる。白球にあたる。白球が上昇する。この運動を繰り返す。

（５）運動量保存とエネルギー保存

下のような質量2kgの２つの球の衝突を考えよう。ただし衝突の前後で２つの球の運動量とエネルギーはそれぞれ保存する。

１）ＡとＢの運動量の和が衝突の前後で保存する式を書け

衝突前のＡの運動量は　質量×速度＝2[kg]×4[m/s]=8[kg･m/s]

衝突前のＢの運動量は　質量×速度＝2[kg]×0[m/s]=0[kg･m/s]

衝突後のＡの運動量は　質量×速度＝2[kg]×Va[m/s]=2Va[kg･m/s]

衝突後のＢの運動量は　質量×速度＝2[kg]×Vb[m/s]=2Vb[kg･m/s]

ＡとＢの運動量の和が衝突の前後で保存するので

$8+0=2(Va+Vb)$　　　$Va+Vb=4$

２）ＡとＢの運動エネルギーの和が衝突の前後で保存する式を書け

衝突前のＡの運動エネルギーは　（質量×速度 ^{2}）／２＝２×4^2／2=16

衝突前のＢの運動エネルギーは　（質量×速度 ^{2}）／２＝２×0^2／2=0

衝突後のＡの運動エネルギーは　（質量×速度 ^{2}）／２＝２×Va^2／2=Va^2

衝突後のＢの運動エネルギーは　（質量×速度 ^{2}）／２＝２×Vb^2／2=Vb^2

ＡとＢの運動エネルギーの和が衝突の前後で保存するので

$16+0=Va^2+Vb^2$　　　$Va^2+Vb^2=16$

１）と２）より　Va=4[m/s]　Vb=0[m/s]　または　Va=0[m/s]　Vb=4[m/s]

実際にはAはＢを追い抜くことができないので Va=0[m/s]　Vb=4[m/s]

つまりＡが止まっているＢにあたって今度はＡが止まってＢが元のＡの速度で動き出す。

（６）エネルギー保存を利用したいくつかの問題

地表面から初速v_0で打ち上げられたロケットが地球の引力圏から脱出する最小速度を求めよ。

重力による位置エネルギーは地球に中心からｒ（ｒ＞地球の半径）離れた点で

基準点　ｒ＝　　位置エネルギー０

$U(r)=-GmM/r$

基準点　ｒ＝∞　位置エネルギー０

$U(r)=-\int(-GmM/r^2)\,dr=-GmM/r$

つまり地表面では

$U=-GmM/R$　　Ｒ：地球の半径

引力圏から脱出すると

$U=0$　　$mv_0^2/2-GmM/R=mv^2/2+0$

最小速度は脱出したあとの速さが０とすればよいから

$mv_0^2=2GM/R$

また地表面での重力はｍｇともかけるから

$GM/R^2 = g$　$GM/R = Rg$
$v_0 = \sqrt{2Rg} = 11 \times 10^3$　(m/s)

一方大気圏内の分子の速さは
窒素　4.8×10^2（m/s）　水素　1.8×10^3（m/s）
だから宇宙空間に逃げていかない

（７）エネルギーの変換
○単位の復習
長さ（m）　時間（秒）　質量（kg）
速度：長さの時間微分（短い時間でのわり算）　(m/s)
加速度：速度の時間微分　(m/s^2)
力：質量×加速度　($kg \cdot m/s^2$　＝　N　ニュートン)

○エネルギーの変換
仕事：力を長さで積分　一定の力なら力×長さ
１Ｎの力で１ｍ物体を押すときの仕事は　１N･ｍ　＝　１J　ジュール
位置エネルギー：　物体の重さ×高さ　mgh
0.1kg の物体が１ｍの高さにあれば　$0.1 \times 9.8 \times 1 \sim 1\,kg \cdot m/s^2 \cdot m = 1\,N \cdot m = 1\,J$
運動エネルギー　質量×速度の２乗÷２　$mv^2/2$
２kg の物体が 1m/s で運動するとき　$1\,kg \cdot m/s \cdot m/s = 1\,kg \cdot m/s^2 \cdot m = 1\,N \cdot m = 1\,J$　)
電気的エネルギー
電力：電流×電圧　（W　＝　J/s　仕事率　単位時間あたりの仕事量　）
１Ｖの電圧がかかり１Ａの電流が流れているとき物体の得る電力は　１W＝１J/s
電力量：　ある時間の電力量　電気的エネルギー
１秒間１Ｖの電圧がかかり１Ａの電流が流れているとき得る電気的エネルギーは　１J

熱エネルギー
１g の水を１℃上げるのに必要な熱エネルギー　１カロリーcal（＝4.2J　１J＝0.24cal）
１ｇの水を 0.24℃あげるのに必要な熱エネルギーは　１Ｊ
両方ともエネルギーなのでそれぞれの単位は等しいことを確かめよう。

エネルギーの単位
仕事＝力×距離　→　単位は　[N]×[m]＝[Nm]
運動エネルギー＝質量×速度 ²／２　→　単位は　$[kg] \times [m/s]^2 = [kgm^2/s^2]$
一方　力＝質量×加速度　→　単位は　$[kg] \times [m/s^2] = [kgm/s^2]$
仕事　→　$[Nm] = [kgm/s^2] \times [m] = [kgm^2/s^2]$
エネルギーの単位を　ジュール[J]と表す　[Nm]＝[J]
1N の力で 1m 動かしたときの仕事は 1J

（８）仕事率
単位時間あたりにした仕事量（エネルギー）
仕事／時間　１J/s＝１W　ワット
例　100W の電球を１時間つけておくのに必要なエネルギーは？
$100 \times 3600 = 3.6 \times 10^5$ J
そのエネルギーで 60kg の人をどこまで持ち上げられるか？
60kg の人を 1m 持ち上げるのに必要な仕事（エネルギー）は

$60\times9.8\times1=588J$

だから $3.6\times10^5J／588=612m$

例　１ヶ月の使用電力量が　250kW 時　であった。これは何 J か？

また１ヶ月平均何 W 使用しつづけたことになるか？

１k W 時というのは 1kW の仕事率で１時間仕事をしたときの総仕事量

$1000\times3600=3.6\times10^6J$

だから 250kW 時$=250\times3.6\times10^6=9.0\times10^8J$

実際はこれは１ヶ月で使用した量なので実際の仕事率は

１ヶ月$=3600\times24\times30=2592000=2.6\times10^6$秒

9.0×10^8J／（2.6×10^6秒）＝350W

例　１トンの水を 10mの高さから流したとき得られるエネルギーを全部電力として消費した。この電力量は何 kW 時になるか？

１トンの水が 10mの高さにあるときその位置エネルギーは　$10^3\times9.8\times10=9.8\times10^4$ J

一方、1kW 時$=10^3J/s\times3600\ s=3.6\times10^6J$

9.8×10^4／（3.6×10^6）＝0.027kW 時

例　１ヶ月の使用電力量が　250kW 時　であった。これは黒部ダム(高さ 186m 落差 545m)でいくらの水を流したときのエネルギーに相当するか？

250kW 時$=9.0\times10^8J$　　黒部ダムでの放水量を m トンとするとその位置エネルギーは

$m\times10^3\times9.8\times545=5.3\times10^6$　　（9.0×10^8）÷（5.3×10^6）＝170 トン

33 万 kw$=3.3\times10^8J/s$

ちなみに黒部ダムの放水量は毎秒 $10m^3$　10 トン　放出エネルギーは毎秒

$10^4\times9.8\times545=5.3\times10^7$ J /s　53000kw　（最大出力 33 万 kw）

１家庭の１月の電気消費量を 250kw 時とすると平均 350w

53000／0.35＝15 万世帯　（実際は 100 万世帯分供給）